

# MÉTODO SIMPLIFICADO PARA EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE SISTEMAS MURO-MARCO

Manuel L. Gutiérrez de Velasco R.<sup>a</sup>

## RESUMEN

Se propone un procedimiento aproximado de solución para la distribución de cargas horizontales en sistemas estructurales compuestos de muros de cortante y marcos, utilizando una matriz de rigidez simplificada, que puede implantarse de manera sencilla en una hoja de cálculo de la computadora personal.

Se comprueba la exactitud de la propuesta comparando sus resultados con los de otros métodos. Asimismo, se presentan algunos ejemplos de aplicación.

**Palabras Clave:** Estructuras muro-marco, Análisis estructural, Métodos matriciales, Flexibilidades, Rigideces, Método matricial simplificado, Muros de concreto, Método de Wang, Método de Khan y Sbarounis, Ecuaciones de Wilbur.

## ABSTRACT

It is proposed an approximate solution procedure for distribution of horizontal loads in structural systems made up of shear walls and frames, using a simplified stiffness matrix, which can be easily implemented in a spreadsheet of a personal computer.

The accuracy of the proposal is verified by comparing its results with those obtained from other methods. Some examples of application are also presented.

**Keywords:** Wall-frame structures, Structural analysis, Matrix methods, Flexibilities, Stiffness, Simplified matrix method, Concrete walls, Wang Method, Khan and Sbarounis Method, Wilbur Equations.

## RESUMO

Propõe-se um procedimento aproximado de solução para a distribuição de cargas horizontais em sistemas estruturais compostos por muros de cisalhamento e armações, utilizando uma matriz de rigidez simplificada, que pode ser facilmente executada numa planilha do computador pessoal.

Verifica-se a exatidão da proposta, comparando seus resultados com aqueles obtidos por outros métodos. Também se apresentam alguns exemplos de aplicação.

**Palavras-chave:** Estructuras muro-armação, Análise estrutural, Métodos matriciais, flexibilidades, rigidezes, Método matricial simplificado, Muros de concreto, Método de Wang, Método de Khan e Sbarounis, Equações de Wilbur.

## Notación

D	Desplazamiento relativo entre niveles de la estructura.
DF	Desplazamiento relativo entre niveles de marcos.
DW	Desplazamiento relativo entre niveles de muros.
F	$(FFI FW) + I$
FF	Matriz de flexibilidades del subsistema de marcos.
FFI	Matriz inversa de FF.
FI	Matriz inversa de F.
FW	Matriz de flexibilidades del subsistema de muros.
I	Matriz identidad.
K	$(KF + KW)$ .
KF	Matriz de rigideces del sistema de marcos.

<sup>a</sup>Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías. Universidad de Guadalajara. Correo electrónico: manuelgdev@hotmail.com

KW	Matriz de rigideces del sistema de muros.
KI	Matriz inversa de K.
P	Vector de cargas totales.
PF	Vector de cargas en sistema de marcos.
PW	Vector de cargas en sistema de muros.
R	Vector de rigidez del marco derivado con las ecuaciones de Wilbur.
SD	Deflexión de la estructura
SDF	Deflexión de los marcos
SDW	Deflexión de los muros
V	Vector de cortantes en la estructura
VF	Vector de cortantes del sistema de marcos
VW	Vector de cortantes del sistema de muros

## INTRODUCCIÓN

Para suministrar a los edificios altos con rigidez y resistencia ante cargas laterales, viento y sismo, se pueden utilizar muros en combinación con los marcos. Asimismo, el sistema de muros coadyuva a portar las cargas verticales y en la subdivisión de espacios arquitectónicos.

Observaciones efectuadas posteriormente a algunos sismos, muestran que los edificios con sistemas marco-muro diseñados adecuadamente sufren menos daños estructurales y no estructurales que edificios similares con estructuras consistentes sólo en marcos (Ref. 1).

El objetivo del análisis de este tipo de estructuras es asignar cargas horizontales a cada subsistema, de marcos y de muros, que componen el sistema estructural. Los métodos para analizar los sistemas muro-marco, se pueden clasificar como métodos manuales y métodos para computadora.

El análisis ante cargas laterales de estructuras con muros y marcos se inició a finales de los años 40 y principios de los 50 del siglo pasado; los primeros intentos de análisis asignaban toda la carga al sistema de muros, en el supuesto de que esto era conservador basándose en la diferencia significativa de rigideces de los sistemas; otras propuestas distribuían la carga horizontal en función de las rigideces de cada sistema. Sin embargo, las propuestas anteriores resultan del lado de la inseguridad para el sistema de marcos, especialmente en los niveles superiores. En las décadas de los 60 y 70, aunque se plantearon soluciones adecuadas pero que eran complejas considerando la escasa disponibilidad de equipos de cómputo en la época, se privilegiaron las soluciones manuales como el método iterativo de Khan y Sbarounis, el cual tuvo amplia aceptación con los calculistas.

Aunque en la actualidad existen programas de computadora que permiten el análisis de las estructuras compuestas por marcos y muros de cortante, las limitaciones técnicas y económicas obligan a que el común de los ingenieros no tengan acceso a ellos. Asimismo, en las etapas preliminares del diseño estructural, un método simplificado puede utilizarse para ahorrar tiempo y esfuerzo.

En este artículo se presenta una propuesta consistente en una solución matricial simplificada, planteada con el propósito de que el análisis de estructuras con muros y marcos se pueda programar de manera sencilla en una hoja de cálculo.

## MÉTODOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE SISTEMAS MURO-MARCO

A continuación se revisan diversos métodos para el análisis estructural de sistemas muro-marco como antecedente a la presentación del método simplificado propuesto. Los métodos expuestos se utilizan posteriormente para comparar resultados.

Se considera sólo el caso de una estructura simétrica en planta, de manera que se puedan omitir los efectos de la torsión, para así poder analizarla como una estructura plana. La estructura original se sustituye por una estructura equivalente, idealizándola como dos sistemas conectados por elementos incompresibles, en donde las cargas asignadas provocarán los mismos desplazamientos en los diferentes niveles de marcos y muros. La estructura idealizada tiene  $n$  grados de libertad correspondientes a los desplazamientos de cada uno de los niveles de la estructura.

Se plantean los métodos de flexibilidades y de rigideces. Las matrices de flexibilidades y de rigideces de un elemento de muro deberán incluir los efectos de deformaciones por flexión y cortante. En muros cuya altura no excede de un tercio de su longitud, se pueden desprestigiar las deformaciones por flexión y considerar sólo las debidas al cortante.

La aplicación de los métodos matriciales a estructuras compuestas por muros de cortante y marcos pueden consultarse en mayor detalle en la literatura (Ref. 2 y 4).

Asimismo, se plantean métodos aproximados como son el método de Wang et al (Ref. 5), que es un método simplificado para utilizarse en computadora, y el método de Khan y Sbarounis (Ref. 4 y 6), que es un método manual.

#### • MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

Las cargas asignadas a los marcos y muros, PF y PW, se determinan al aplicar las relaciones entre desplazamiento y carga, así como las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio tal como se indica a continuación.

De las relaciones entre desplazamiento y carga, se tiene que:

$$SDF = PF \times FF \quad (1)$$

$$SDW = PW \times FW \quad (2)$$

Por compatibilidad entre desplazamientos, se igualan las deflexiones entre marcos y muros.

$$SDF = SDW \quad (3)$$

$$PF = FFI \times FW \times PW \quad (4)$$

Por equilibrio de cargas, la suma de las cargas asignadas a marcos y muros es igual a la carga total, esto es

$$\begin{aligned} P &= PF + PW \\ &= ((FFI \times FW) + I) \times PW \\ &= F \times PW \end{aligned} \quad (5)$$

De manera que se obtiene la siguiente distribución de cargas

$$PW = FI \times P \quad (6)$$

$$PF = P - PW \quad (7)$$

Se propone el siguiente procedimiento de solución en el cual se emplean las ecuaciones derivadas anteriormente:

1. Se determina la matriz de flexibilidades del muro como viga en voladizo, FW.
2. Se determina la matriz de flexibilidades del marco, FF.
3. Se calcula la matriz F como  $((FFI \times FW) + I)$ ; donde FFI es la matriz inversa de FF, e I es la matriz identidad.
4. La cantidad de carga asignada a los muros es  $PW = (FI \times P)$ ; en donde FI es la inversa de F, y P es el vector de cargas.
5. La cantidad de carga asignada a los marcos se puede obtener por diferencia, esto es  $PF = P - PW$ .

La matriz de flexibilidades del marco se genera aplicando carga unitaria a cada nivel del marco y registrando las deflexiones producidas en todos los niveles. Para ello es conveniente contar con un programa de análisis estructural de marcos.

La matriz de flexibilidades del muro, considerado como viga en voladizo, se genera aplicando carga unitaria a puntos del muro que coinciden con los niveles de entrepiso.

#### • MÉTODO DE RIGIDECES

Para el método de rigideces se parte de las relaciones entre carga y desplazamiento, para aplicar posteriormente las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad

Relaciones entre carga y desplazamiento:

$$PF = KF \times SDF \quad (8)$$

$$PW = KW \times SDW \quad (9)$$

Donde:

$$KF = FFI \quad (10)$$

$$KW = FWI \quad (11)$$

Ecuación de compatibilidad

$$SDF = SDW = SD \quad (12)$$

Ecuación de equilibrio

$$\begin{aligned}
 P &= PF + PW \\
 &= KF \times SDF + KW \times SDW \\
 &= (KF + KW) \times SD \\
 &= K \times SD
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Donde:

$$K = KF + KW \tag{14}$$

para así obtener las deflexiones de la estructura como

$$SD = KI \times P \tag{15}$$

y la distribución de carga entre marcos y muros de cortante

$$PF = SD \times KF \tag{16}$$

$$PW = SD \times KW \tag{17}$$

Con las ecuaciones derivadas anteriormente, se propone el procedimiento indicado a continuación:

1. Se calculan las matrices de rigideces para cada sistema. KW es la inversa de FW, y KF es la inversa de FF.
2. La matriz de rigidez del sistema conjunto, K, es la suma de las matrices de rigideces del sistema de marcos y del sistema de muros.
3. Los desplazamientos del sistema SD se obtienen del producto (KI P); en donde KI es la inversa de K.
4. Conocidos los desplazamientos de la estructura se procede a calcular la cantidad de carga asignada a cada sistema, PW y PF.

Las matrices de rigideces de los marcos y muros se pueden tomar como las inversas de las matrices de flexibilidades de estos sistemas.

#### • MÉTODO DE WANG *ET. AL.*

Utilizando el método de rigideces, Wang *et al* (Ref. 5) establecen un elemento de nivel, obtenido mediante la suma de las matrices de rigideces del muro y del marco para simular un nivel de la estructura. Estos autores consideran que se reduce el volumen de datos y cálculos con un error de menos de 8.3%

El muro se considera como elemento en voladizo y su matriz de rigidez, en cada nivel, es la misma que en un elemento de viga. El marco se representa como un voladizo en cortante con matriz de rigidez obtenida del método del Portal.

#### • MÉTODO DE KHAN Y SBAROUNIS

Khan y Sbarounis (Ref. 4 y 6) propusieron un método de análisis práctico, por aproximaciones sucesivas, cuya solución se afina hasta el grado de precisión requerido, y que tiene gran aceptación para soluciones manuales.

1. Se aplican las cargas horizontales en su totalidad al sistema de muros y se calculan los desplazamientos.
2. Se determinan las fuerzas producidas, en cada nivel del sistema de marcos, por los desplazamientos calculados en el paso anterior.
3. Se calculan las deformaciones que producen estas nuevas cargas sobre el muro.
4. Se comparan los desplazamientos de ambos sistemas y se repite el procedimiento hasta obtener en ambos desplazamientos similares.
5. El método utiliza una corrección por convergencia para los desplazamientos a utilizar en cada ciclo.

El paso 2 del procedimiento de solución puede completarse con un análisis exacto o uno aproximado. Para el análisis exacto, tradicionalmente se resuelve con distribución de momentos. El análisis aproximado se puede resolver con las ecuaciones de Wilbur.

Para tener un valor inicial y que el método converja de manera más rápida, los autores del método presentan una serie de gráficas en donde se obtiene la relación aproximada entre las deformaciones del sistema marco-muro y las del muro aislado.

De manera aproximada se pueden calcular las deflexiones iniciales de la estructura como la recíproca de la suma de las recíprocas de las deflexiones, en cada nivel, de cada sistema aislado sujeto al total de la carga. Esto es equivalente a considerar, en cada nivel, los sistemas integrantes de la estructura como resortes en paralelo.



la configuración de deformación determinada para cada sistema es definitiva, por lo que sólo resta definir los giros en los nudos del sistema de marcos.

Si el método simplificado se emplea para un análisis preliminar, sus resultados deberán ser refinados posteriormente con un análisis exacto que incluya los efectos no considerados como son la torsión, las deformaciones axiales y por cortante, así como las condiciones de cimentación.

Según la propuesta presentada en la referencia 6, una forma aproximada de considerar los efectos de la torsión es utilizar los cortantes y deflexiones en cada eje de un entrepiso, obtenidos del análisis de la estructura plana, para calcular la rigidez torsional de la estructura, el centro de cortante, y los demás parámetros requeridos en la determinación del cortante adicional que resulte de la excentricidad lateral de las cargas.

#### • DESARROLLO DE UNA HOJA DE CÁLCULO

A continuación se plantea la elaboración de una hoja de cálculo para computadora personal utilizando el método propuesto. La descripción del procedimiento, presentado en el apartado anterior, es de utilidad para una mejor comprensión de la HC. Empleando macros se puede diseñar una hoja más eficiente.

En la siguiente explicación se hace referencia a la HC incluida en el apéndice. La HC presentada se divide en tres partes. En la primera parte, se declaran los datos de entrada; en la segunda parte se presentan los diferentes cálculos efectuados: se obtienen la matriz de rigideces del muro y la matriz de rigideces del marco, se genera la matriz de la estructura; y en la tercera parte, que resume los resultados, se define la respuesta del sistema sujeto a análisis.

La matriz de rigideces del muro se obtiene de invertir su matriz de flexibilidades la cual se deriva analizando el muro como una viga en voladizo con el método de la carga virtual. Los datos utilizados son los niveles de la estructura, las dimensiones y propiedades geométricas del muro, las propiedades mecánicas del material, y la carga total aplicada en cada entrepiso.

Con el método de la carga virtual, se calcula la deflexión en un punto de la estructura inducida por una carga aplicada en otro punto. Se aprovecha la capacidad de la HC para generar tablas y así obtener la matriz de flexibilidades. Los datos empleados corresponden a la magnitud y la posición de las cargas real y virtual.

Se utilizan las fórmulas de Wilbur para obtener la rigidez de los entrepisos en sustitución de un análisis más detallado. Los datos utilizados incluyen la suma de rigideces de columnas y trabes en cada nivel de los marcos, así como el módulo elástico del material utilizado.

La matriz de rigidez de la estructura es la suma de las rigideces de los sistemas de muro y marco.

La configuración deformada de la estructura se obtiene del producto de la inversa de la matriz de rigideces de la estructura con el vector de cargas. Para derivar las cargas asignadas a cada sistema componente de la estructura, se multiplica la matriz de rigidez respectiva de cada sistema por las deformaciones obtenidas anteriormente.

#### EJEMPLOS

Para evaluar la exactitud del procedimiento descrito se analizaron varios casos de estructuras con marcos y muros, con diferentes rigideces relativas entre sistemas y con diferentes números de niveles; en los párrafos siguientes se muestran un par de casos con cinco y diez niveles respectivamente.

Las respuestas obtenidas en dichas estructuras, analizadas con los diferentes métodos expuestos en este artículo, se resumen para mayor facilidad de comparación en las tablas 1 y 2 anexas. En estas tablas, los métodos se han identificado con las primeras cuatro letras del alfabeto como:

- A. Método matricial exacto.
- B. Método de Wang *et. al.*
- C. Método de Khan y Sbarounis.
- D. Método matricial simplificado.

#### • ESTRUCTURA DE CINCO NIVELES

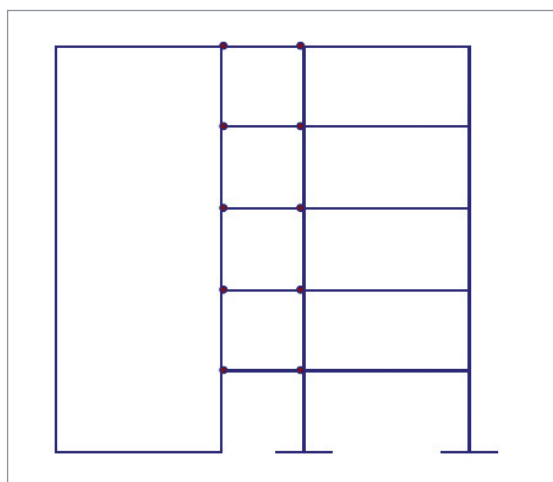
Como primer ejemplo, se presenta una estructura resuelta en la Ref. 4 por el método de Khan y Sbarounis. La estructura analizada tiene 5 niveles con 3 metros de altura cada uno. La inercia del muro se tomó como  $1.6 \text{ m}^4$ ; y la inercia de los elementos del marco considerada fue de  $0.002133 \text{ m}^4$  para las columnas y de  $0.002604 \text{ m}^4$  para las trabes. Las rigideces (inercia/longitud) de columnas ó vigas, según sea el caso, son la suma de las rigideces de todos los elementos en un nivel dado; de manera que la rigidez de columnas de un entrepiso tipo es de  $9.954 \text{ m}^3$  y la rigidez de trabes es de  $5.859 \text{ m}^3$ . El módulo de elasticidad del concreto utilizado es de  $1,500,000. \text{ ton/m}^2$ .

**Tabla 1.** Comparativa de la respuesta estructural de un sistema marco-muro de cinco niveles resuelto por varios métodos.

DEFLEXIÓN ESTRUCTURAL (m)				
Nivel	A	B	C	D
5	0.024473	0.025013	0.024632	0.024614
4	0.018067	0.018497	0.018144	0.018105
3	0.011747	0.012080	0.011775	0.011734
2	0.005987	0.006228	0.005984	0.005966
1	0.001669	0.001800	0.001668	0.001659
CORTANTE ASIGNADO AL MARCO (ton)				
Nivel	A	B	C	D
5	55.933	48.062	47.682	48.010
4	41.879	47.338	46.945	46.994
3	41.261	43.164	42.903	42.545
2	32.749	32.665	33.226	33.063
1	13.101	13.274	19.160	18.936
CORTANTE ASIGNADO AL MURO (ton)				
Nivel	A	B	C	D
5	-5.933	1.938	2.318	1.990
4	48.121	42.662	43.055	43.006
3	78.739	76.836	77.097	77.455
2	107.251	107.335	106.774	106.937
1	136.899	136.726	130.840	131.064

Se consideran cargas horizontales concentradas aplicadas en cada nivel de 50, 40, 30, 20, y 10 ton respectivamente, comenzando por el nivel superior.

En la figura 1, se presenta un croquis de la estructura plana equivalente utilizada para el análisis del sistema de marcos y muros de este ejemplo. Notar que marcos y muros se suponen ligados con traveses infinitamente rígidos articulados en sus extremos de manera que las deflexiones debidas a cargas horizontales sean iguales en ambos sistemas.



**Fig.1.** Estructura plana equivalente del ejemplo 1.



Los cálculos presentados en la HC del Apéndice, corresponden al análisis de este ejemplo utilizando el método matricial simplificado.

El resumen de los resultados obtenidos con los diferentes métodos de análisis se presenta en la Tabla 1. En la primera parte de la tabla se muestran las deflexiones de la estructura, en metros, en cada uno de sus 5 niveles según los valores obtenidos para cada método de análisis utilizado. En la segunda y tercera parte de la tabla se presentan las cantidades de cortante asignadas al marco y al muro, respectivamente.

#### • ESTRUCTURA DE DIEZ NIVELES

Los datos empleados para la estructura de diez niveles son los siguientes. La inercia total de los muros es de  $3.60 \text{ m}^4$ . El módulo de elasticidad del concreto,  $2,531,050 \text{ ton/m}^2$ . Las cargas horizontales aplicadas son de 5 ton en el último nivel y de 10 ton en cada uno de los niveles restantes. La altura de entrepisos, de 3.0 m, es similar en todos los niveles. La suma de rigideces de las columnas de un entrepiso tipo es  $10.417 \text{ m}^3$ . La suma de rigideces de las trabes de un entrepiso en la dirección considerada es  $5.208 \text{ m}^3$ .

El croquis correspondiente a este ejemplo sería similar al presentado en la figura 1, pero con el número de niveles correspondiente. Los resultados de los diferentes análisis se presentan en la Tabla 2. Aplican comentarios similares al ejemplo anterior. Este ejemplo se utiliza también para mostrar una posible aplicación del método propuesto. El objetivo del ejercicio es determinar la cantidad de muros requerida en la estructura para limitar su desplazamiento lateral a un valor determinado. Para ello, sin modificar el resto de los datos, se proponen diferentes inercias de muros para obtener el desplazamiento resultante respectivo; adicionalmente, se registra la magnitud del cortante asignado a los muros. Los resultados se muestran en las figuras 2 y 3. Entonces, si se considera un valor de desplazamiento límite de 0.015 m, se aprecia en las figuras que se requiere tener una inercia total de muros de aproximadamente  $4.0 \text{ m}^4$ ; y el cortante en la base de los muros resulta de 90 ton del total de las 95 ton aplicadas a la estructura muro-marco.

#### • ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los diferentes métodos utilizados son similares en concepto pero difieren en como se obtiene la matriz de rigideces del marco y en la manera de solucionar el sistema de ecuaciones que se plantea para solucionar el problema.

Los valores obtenidos con el método matricial simplificado, caso D de las tablas, son aparentemente distintos a la solución matricial exacta del caso A, debido a que la matriz de rigidez del marco se generó de manera aproximada. Sin embargo, los resultados del método simplificado son “exactos” en comparación con los métodos manuales como el caso C en donde, para estos ejemplos, también se utilizaron las ecuaciones de Wilbur.



**Tabla 2.** Comparativa de la respuesta estructural de un sistema muro-marco de diez niveles resuelto por varios métodos.

DEFLEXION ESTRUCTURA (m)				
Nivel	A	B	C	D
10	0.018057	0.016227	0.016180	0.016140
9	0.015977	0.014426	0.014412	0.014336
8	0.013854	0.012582	0.012576	0.010585
7	0.011675	0.010675	0.010664	0.010585
6	0.009458	0.008714	0.008693	0.008627
5	0.007248	0.006734	0.006704	0.006652
4	0.005119	0.004799	0.004764	0.004727
3	0.003172	0.003007	0.002970	0.002947
2	0.001547	0.001489	0.001455	0.001444
1	0.000417	0.000415	0.000393	0.000391
CORTANTE ASIGNADO AL MARCO (ton)				
Nivel	A	B	C	D
10	23.939	21.101	20.313	21.141
9	16.824	21.605	21.350	21.619
8	19.315	22.340	22.419	22.329
7	19.948	22.982	23.224	22.945
6	20.490	23.204	23.494	23.138
5	20.330	22.665	22.964	22.566
4	19.044	20.997	21.285	20.859
3	16.549	17.792	18.018	17.604
2	12.258	12.589	13.286	12.963
1	4.758	4.858	7.576	7.394
CORTANTE ASIGNADO AL MURO (ton)				
Nivel	A	B	C	D
10	-18.939	-16.101	-15.313	-16.141
9	-1.824	-6.605	-6.350	-6.619
8	5.685	2.660	2.581	2.671
7	15.052	12.018	11.776	12.055
6	24.510	21.796	21.506	21.862
5	34.670	32.335	32.036	32.434
4	45.956	44.003	43.715	44.141
3	58.451	57.208	56.982	57.396
2	72.742	72.411	71.714	72.037
1	90.242	90.142	87.424	87.606

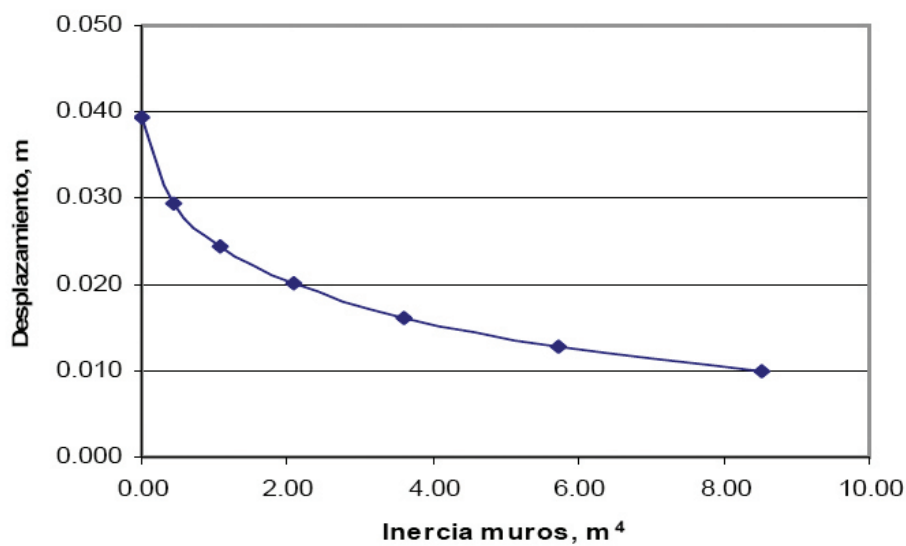
En la Tabla 3, se presenta un resumen de los porcentajes de error, respecto al método A considerado como exacto, en la deflexión del nivel superior, SD, y en el cortante basal del muro, VW, para cada método utilizado en los ejemplos. En función de estos parámetros los resultados del método propuesto son adecuados.

Aunque el porcentaje de error para el desplazamiento en la parte superior de la estructura del segundo ejemplo es de 10.6 por ciento, la magnitud del error de menos de 2 mm no es significativa. El porcentaje de error en el cortante basal asignado a los muros en ambos ejemplos, así como en su magnitud, es mínimo.

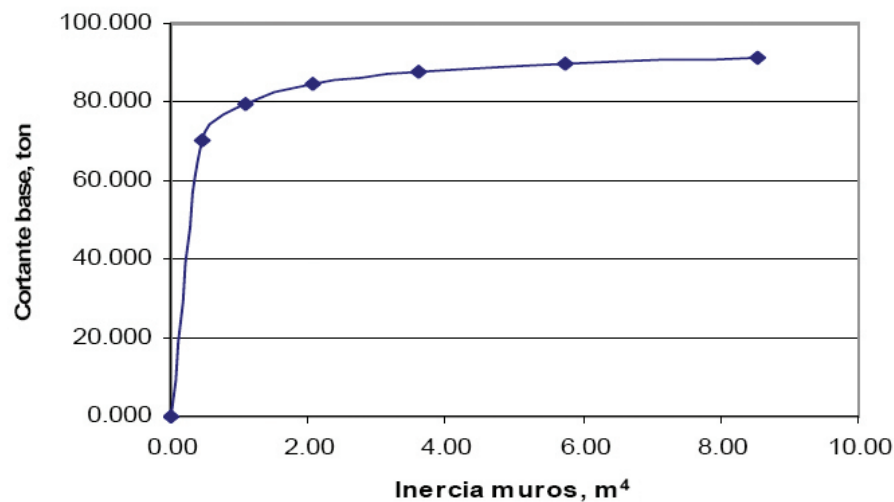
Los cortantes en los marcos, así como en el nivel superior de los muros, pueden cuestionarse ya que, aunque en términos de magnitud no son muy distintos, si presentan diferencias en términos porcentuales.

**Tabla 3.** Porcentaje de error en el desplazamiento del nivel superior y el cortante basal de los diferentes métodos respecto al caso A para los ejemplos resueltos.

METODO	EJEMPLO	SD	VW
B	1	2.2	0.1
	2	10.1	0.1
C	1	0.7	4.4
	2	10.4	3.1
D	1	0.6	4.3
	2	10.6	2.9



**Fig.2.** Variación del desplazamiento lateral de una estructura muro-marco al modificar la inercia total de los muros.



**Fig. 3.** Variación del cortante asignado a la base de los muros de un sistema muro-marco al modificar la inercia total de los muros.

## CONCLUSIONES

Se describe un procedimiento aproximado para resolver una estructura de muros y marcos por el método de rigideces. La ventaja de este método es su fácil implantación en una hoja de cálculo. Sus resultados son comparables a los resultados de los métodos más elaborados.

El método propuesto es una variación del método de las rigideces en el cual se utiliza una matriz de rigideces simplificada para el sistema de marcos aprovechando las ecuaciones de Wilbur. El error respecto a la solución exacta radica en estas ecuaciones aproximadas.

Se considera que la principal aplicación del método propuesto es en las etapas preliminares de diseño.

La discusión en este artículo se ha limitado a sistemas simétricos en los que puede despreciarse la torsión en los entrepisos. En la práctica es raro encontrar edificios perfectamente simétricos, lo cual limita la aplicación del método propuesto. En la referencia 6 se presentan recomendaciones para considerar diversos efectos como los causados por la torsión.

Para desarrollo posterior del método propuesto se deberán incluir los efectos de la torsión, la deformación axial de las columnas, y las condiciones de cimentación, de tal manera que se mantenga la simplicidad del método.

## REFERENCIAS

- [1] Mahin, S.A., y Bertero, V.V., "Nonlinear Seismic Response of a Coupled Wall System", *J. of the Structural Division*, September, 1976.
- [2] Ghali, A., y Neville, A.M., *Structural Analysis: A Unified Classical and Matrix Approach*, Intext Educational Publishers, 1972.
- [3] Rosenblueth, E., y Esteva, L., *Diseño sísmico de edificios*, Folleto complementario al Reglamento de Construcciones del Distrito Federal, México, D.F., 1962.
- [4] Bazán Z., E., y Meli P., R., *Manual de Diseño Sísmico de Edificios*, Limusa, 1987.
- [5] Wang, Q.F., Fang, D.P., y Wang, L.Y., "A Storey Element for Analyzing Frame Shear Wall Structures, *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*, Vol. 10, No. 2, 2009, pp. 48-53.
- [6] Khan, F.R.; y Sbarounis, J.A., "Interaction of Shear Walls and Frames", *J. of the Structural Division, Proceedings of ASCE*, Junio, 1964.

## APÉNDICE

### I. Datos

MÉTODO DE RIGIDECES SIMPLIFICADO					
Nivel	h	MURO	MARCO		P
		Iw	SKc	SKt	
	cm	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>		ton
5	300	1.60E+08	9954	5859	50
4	300	1.60E+08	9954	5859	40
3	300	1.60E+08	9954	5859	30
2	300	1.60E+08	9954	5859	20
1	300	1.60E+08	9954	5859	10
	1500				150

Ew	150,000	k/cm <sup>2</sup>	Módulo elástico concreto muro.
Ef	150,000	k/cm <sup>2</sup>	Módulo elástico concreto marco.
h	Altura entrepiso.		
Iw	Inercia muro.		
SKc	Suma rigideces columnas entrepiso.		
SKt	Suma rigideces trabes entrepiso en sentido del análisis.		
P	Carga horizontal.		

### II. Cálculos

#### MATRIZ DE RIGIDECES DEL MURO

##### DEFLEXIONES MÉTODO CARGA VIRTUAL

P	1000	kg	Carga real.
XP	1500	cm	Posición carga real.
F	1		Carga virtual.
XF	1500	cm	Posición carga virtual.

Nivel	x	M	m	δ
5	1500	0	0	0.0003
4	1200	300000	300	0.0025
3	900	600000	600	0.0070
2	600	900000	900	0.0138
1	300	1200000	1200	0.0228
0	0	1500000	1500	
				0.0464
				cm

x	Distancia desde la base, cm.
M	Momento producido por la carga real, kg-cm.
m	Momento producido por la carga virtual.

MATRIZ FLEXIBILIDADES MURO, FW					cm/ton
	1500	1200	900	600	300
1500	0.046406	0.032625	0.019969	0.009563	0.002531
1200	0.032625	0.023625	0.014906	0.007313	0.001969
900	0.019969	0.014906	0.009844	0.005063	0.001406
600	0.009563	0.007313	0.005063	0.002813	0.000844
300	0.002531	0.001969	0.001406	0.000844	0.000281

Nota: se despreció la deformación por cortante.

MATRIZ RIGIDEZES MURO, KW					ton/m
355556	-1066667	1422222	-1422222	1422222	
-1066667	3555556	-5333333	5688889	-5688889	
1422222	-5333333	9244444	-11022222	11377778	
-1422222	5688889	-11022222	14933333	-16711111	
1422222	-5688889	11377778	-16711111	20622222	

MATRIZ DE RIGIDEZES DEL MARCO				
Rigidez de entrepisos calculada con fórmulas de Wilbur.				
R				
NIVEL	EMP	ART		
5	7376	7376		
4	7376	7376		
3	7376	7376		
2	7676	6373		
1	11414	3040		

Ton/m

MATRIZ DE RIGIDEZES MARCO, KF					ton/m
7376	-7376	0	0	0	
-7376	14753	-7376	0	0	
0	-7376	14753	-7376	0	
0	0	-7376	15052	-7676	
0	0	0	-7676	19090	

MATRIZ DE RIGIDEZES ESTRUCTURA, K				
362932	-1074043	1422222	-1422222	1422222
-1074043	3570308	-5340710	5688889	-5688889
1422222	-5340710	9259197	-11029598	11377778
-1422222	5688889	-11029598	14948385	-16718787
1422222	-5688889	11377778	-16718787	20641313

### III. Resultados

RESPUESTAS DE LA ESTRUCTURA					
NIVEL	SD	PF	PW	VF	VW
5	0.024614	48.010	1.990	48.010	1.990
4	0.018105	-1.016	41.016	46.994	43.006
3	0.011734	-4.449	34.449	42.545	77.455
2	0.005966	-9.482	29.482	33.063	106.937
1	0.001659	-14.127	24.127	18.936	131.064
	m	ton			